

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА ПРИ ВНЕШНЕМ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Использование технологий анализа данных для обработки результатов температурных измерений направлена на решение задач контроля параметров управляющих тепловых режимов, мониторинга теплового состояния основного промышленного оборудования, а также вопросы обеспечения целостности и доступности данных, циркулирующих в автоматизированных системах управления технологическими процессами (АСУ ТП).

В статье рассмотрена задача определения нестационарных температурных полей внутри объекта по зашумленным результатам поверхностных температурных измерений и параметрам внешнего теплового воздействия на его поверхность. Математически процесс теплопереноса представлен параболическим уравнением, включает начальные условия, а также граничные условия, определенные по результатам измерений температуры на поверхности объекта и в соответствии с характеристиками внешнего теплового режима.

Точность и устойчивость представленного в работе метода решения задачи теплопереноса исследованы посредством вычислительного эксперимента. В эксперименте найденные температурные значения во внутренних точках объекта сравнивались с тестовыми функциями, сформированными на основе имитационного моделирования. Результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют о надежности и устойчивости используемого метода определения внутренних нестационарных температурных полей из измеренных граничных значений. Предложенный алгоритм определения температуры используется для обеспечения целостности данных при обработке измеренной информации, так как направлен на уменьшение негативного влияния шумов на точность конечного результата. Алгоритм определяет внутренние нестационарные температурные поля по результатам косвенных измерений, тем самым обеспечивая доступность информации о внутреннем тепловом состоянии объекта.

Ключевые слова: *нестационарный процесс, уравнение теплопроводности, операционный метод, численное решение, обратная задача, теплоперенос, автоматизированная система управления технологическим процессом (АСУ ТП), целостность информации, доступность информации.*

NUMERICAL METHOD FOR DETERMINING TEMPERATURE FIELD OF A LINEAR OBJECT UNDER EXTERNAL THERMAL INFLUENCE

The use of data analysis technologies for processing the temperature measurement results is aimed at solving the problems of controlling the parameters of controlling thermal modes, monitoring the thermal state of the main industrial equipment, as well as issues of integrity and availability of data circulating in automated control systems for technological processes.

The article is devoted to the problem of determining non-stationary temperature fields inside an object from the noisy results of surface temperature measurements and the parameters of external thermal effect on its surface. Mathematically, the heat transfer process is represented by a parabolic equation, includes initial conditions, as well as boundary conditions formed from temperature measurements on the object's surface and in accordance with the characteristics of the external thermal regime.

The accuracy and stability of the presented method were investigated by means of a computational experiment. In the experiment, the found temperature values were compared with simulate test functions. The computational results indicate the reliability of the proposed method for determining the temperature at the internal points of the object from the measured boundary values. This method can be aim to ensuring the reliability and integrity of data when processing the measured information, reducing the negative effect of initial data noise. The algorithm determines the internal non-stationary temperature fields based on the results of indirect measurements, thereby ensuring the availability of information about the internal thermal state of the object.

Keywords: *non-stationary process, heat conduction equation, operational method, numerical solution, inverse problem, heat transfer, automated control system of technological process, the integrity of information, accessibility of information.*

Введение

Цифровизация технологических процессов, связанных с теплопереносом, направлена на повышение эффективности и оптимизацию современного производства. Обработка результатов измерений, полученных от датчиков АСУ ТП, расположенных вблизи поверхности объекта, позволяет определять внутреннее тепловое состояние объектов, подвергаемых внешнему тепловому воздействию в технологических процессах, связанных с теплопереносом.

Задачи, в которых неизвестные температурные поля внутри объекта находят по ис-

ходным данным, сформированным из результатов граничных измерений и характеристик внешнего теплового воздействия, относятся к классу обратных граничных задач. Сложность решения обратных задач заключается в том, что, с одной стороны, результаты измерений неизбежно содержат отклонения от действительных значений, а с другой стороны, использование общепринятых методов для обработки зашумленных исходных данных дает искаженную информацию о внутреннем тепловом состоянии объекта, что порождает проблему обеспечения целостности и доступности информации о теплофизи-

ческих свойствах объекта. Таким образом, возникает необходимость разрабатывать вычислительные методы, устойчивые относительно погрешности исходных данных, позволяющие уменьшить негативное влияние шумов на точность результата.

Основы теории обратных задач положены в работах А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2]. Дальнейшим исследованиям в этой области посвящены работы О.М. Алифанова [3], А.А. Самарского [4], С.И. Кабанихина, М.А. Шишленина [5], А.Г. Яголы [6]. Разработке вычислительных схем и численных алгоритмов для решения рассматриваемых задач посвящены труды П.Н. Вабищевича [7], Ю.М. Мацевитого [8], Г.И. Марчука [9], В.И. Васильева [10] и других исследователей [11–17].

В данной статье обобщены результаты работы [18] для неоднородной обратной задачи теплопереноса. Исходная задача с помощью прямого и обратного преобразования Лапласа сводится к интегральному уравнению. В статье также предложен численный алгоритм его решения, основанный на регуляризирующем подходе, заключающемся в выборе количества слагаемых в ядре полученного уравнения. Для проверки надежности построенного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент на основе имитационного моделирования. Результаты эксперимента представлены в работе.

Постановка задачи нестационарного теплопереноса

Предпосылки математической модели нестационарного теплового процесса состоят в следующем. Теплоперенос в объекте при вторичной и комплексной термообработке сопровождается эндотермическими и экзотермическими химическими реакциями между внутренними включениями, размеры которых пренебрежительно малы по сравнению с размерами объекта. При химических реакциях происходит выделение или поглощение тепла, влияние которых на температуру внутри объекта характеризуется функцией внутреннего теплового источника. Объект подвергается внешнему тепловому воздействию, при этом в каждой точке поверхности температурные значения одинаковы, что позволяет представить процесс теплопереноса как проблему определения температуры в стержне, одному концу которого соответствует точка на поверхности, а другому – точка внутри объекта, в которой требуется определить температуру.

В соответствии с требованиями технического регламента для выравнивания внутренних температурных полей объекта перед началом технологического процесса, связанного с тепловым воздействием, предусмотрена выдержка при постоянной температуре. Полагаем, что в начальный момент времени температура во внутренних точках объекта была одинаковой. Теплофизические характеристики объекта не претерпевают существенных изменений, что позволяет считать коэффициент теплопроводности постоянной величиной.

Введем следующие обозначения: точка P соответствует началу координат; точке B соответствует точка с координатой L ; x – текущая точка линейного объекта PB , $x \in [0, L]$; T – продолжительность технологического процесса, t – текущее время, $t \in [0, T]$.

Измерения температуры проводятся в точках P и x_0 . Результатам измерения температуры в точке P соответствует функция $\varphi(t)$, а результатам измерения в точке x_0 – функция $q(t)$. Схема измерения температуры изображена на рис. 1.

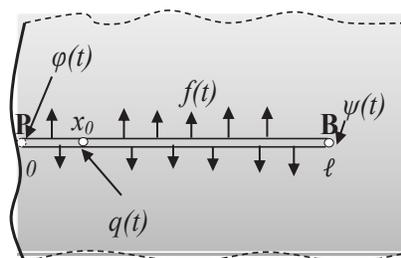


Рис. 1. Схема измерения

В этой задаче требуется найти значения температуры $\psi(t)$ в точке B . Математическую модель процесса, согласно [4], можно представить уравнением теплопроводности

$$u_t = au_{xx} + f(t), \quad x \in (0, L), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

где функция $f(t)$ характеризует мощность внутреннего теплового источника,

a – коэффициент теплопроводности. Из результатов измерений формируются условия

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(x_0, t) = q(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Так как температура в начальный момент одинакова во всем линейном объекте, то этому условию соответствует соотношение:

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (3)$$

Искомым является значение температуры в точке B , а математически требуется найти функцию

$$u(L, t) = \psi(t). \quad (4)$$

Существование единственного решения обратной граничной задачи (1)–(4) обосновано в работах [3] и [9].

Согласно требованиям, предъявляемым к технологическому процессу, при его реализации недопустимы резкие изменения температурных градиентов на поверхности и внутри объекта. Математически эту ситуацию представим в следующем виде: полагаем, что существуют постоянные $M_0 \geq 0$, $M_1 \geq 0$, $M_2 \geq 0$, $M_3 \geq 0$, $M_4 \geq 0$ и $s_0 \geq 0$, $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, $s_3 \geq 0$, $s_4 \geq 0$ такие, что $|u(x, t)| \leq M_0 e^{s_0 t}$, $x \in [0, L]$, $|\varphi(t)| \leq M_1 e^{s_1 t}$, $|q(t)| \leq M_2 e^{s_2 t}$, $|\psi(t)| \leq M_3 e^{s_3 t}$ и $|f(t)| \leq M_4 e^{s_4 t}$ для всех $t > 0$. При этом для любого $t \in [0, T]$ при всех $T > 0$ функции $\varphi(t)$, $q(t)$, $\psi(t)$ и $f(t)$ отвечают условиям теоремы Дирихле.

Неизбежно возникающие отклонения измеренных величин от действительных приводят к тому, что вместо действительных значений q_0 и φ_0 получены q_δ и φ_δ , удовлетворяющие условию $\max\{\|q_\delta - q_0\|_C, \|\varphi_\delta - \varphi_0\|_C\} \leq \delta$, где δ – уровень точности средства измерения температуры.

Таким образом, по измеренным величинам необходимо определить температурное поле $u_\delta(L, t) = \psi_\delta(t)$ в точке В.

Редукция обратной граничной задачи теплопереноса к интегральному уравнению

На первом этапе редукции исходной задачи к интегральному уравнению используем идею, предложенную в [13]. Согласно этому подходу, находим решение прямой задачи теплопереноса, полагая, что функция внешнего теплового режима $\psi(t)$ известна. Математическая модель прямой задачи имеет вид:

$$u_t = au_{xx} + f(t), \quad x \in (0, L), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(L, t) = \psi(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (7)$$

Основываясь на свойствах функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$, $u(x, t)$ и применяя прямое преобразование Лапласа [19], получим следующее операторное изображение прямой задачи теплопереноса:

$$\bar{u}_{xx} - \frac{p}{a} \bar{u} = -\frac{\bar{f}}{a},$$

$$\bar{u}(0, p) = \bar{\varphi}(p), \quad \bar{u}(L, p) = \bar{\psi}(p),$$

где $\bar{u}(x, p)$, $\bar{\varphi}(p)$, $\bar{\psi}(p)$ и $\bar{f}(p)$ – образы функций $u(x, t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $f(t)$ при прямом преобразовании Лапласа.

Изображение аналитического решения

$\bar{u}(x, p)$ прямой задачи имеет следующий

вид:

$$\bar{u}(x, p) = \bar{\varphi}(p) \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(L-x)\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L} + \bar{\psi}(p) \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L} - \frac{\bar{f}}{p} \left(\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(L-x)\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L} + \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L} \right) + \frac{\bar{f}}{p}. \quad (8)$$

Из результатов, доказанных в [13], получаем:

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(L-x)\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L} = \frac{L-x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n(L-x)}{L}\right) \frac{p}{p + \frac{n^2 \pi^2 a}{L^2}} \quad (9)$$

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{a}}L} = \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \cdot \frac{p}{p + \frac{n^2 \pi^2 a}{L^2}} \quad (10)$$

Перегруппировав слагаемые в (8), и принимая во внимание сходимость рядов (9) и (10), получим:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, p) = & \bar{\varphi}(p) \frac{L-x}{L} + \frac{2}{\pi} \bar{\varphi}(p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n(L-x)}{L}\right) \frac{p}{p + \frac{n^2 \pi^2 a}{L^2}} + \\ & + \bar{\psi}(p) \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \bar{\psi}(p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \frac{p}{p + \frac{n^2 \pi^2 a}{L^2}} + \\ & + \frac{4}{\pi} \frac{\bar{f}}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right) \cdot \frac{p}{p + \frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2}}. \quad (11) \end{aligned}$$

Учитывая свойства функций $\varphi(t)$, $f(t)$, $\psi(t)$, найдем решение $u(x, t)$ прямой задачи (5)–(7), применив обратное преобразование Лапласа и теорему о свертке [19]. Получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \varphi(t) \frac{L-x}{L} + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n(L-x)}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau + \\ & + \psi(t) \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \psi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau + \\ & + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} f(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau. \quad (12) \end{aligned}$$

Исследуем сходимость ряда, содержащего функцию $\varphi(t)$, используя теорему Вейерштрасса и следующие оценки:

$$\left| \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau \right| \leq M_1 \int_0^t e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau = \frac{M_1 L^2}{(n^2 \pi^2 a + L^2 s_1)} \left(e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} - 1 \right) \leq \frac{M_1 L^2 e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t}}{(n^2 \pi^2 a + L^2 s_1)}.$$

Имеем

$$\frac{1}{n} \left| \sin \left(\frac{\pi n(L-x)}{L} \right) \right| e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \left| \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau \right| \leq \quad (13)$$

$$\leq \frac{1}{n} \left| \sin \left(\frac{\pi n(L-x)}{L} \right) \right| e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \frac{M_1 L^2 e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t}}{(n^2 \pi^2 a + L^2 s_1)} \leq \frac{M_1 L^2 e^{s_1 t}}{n(n^2 \pi^2 a + L^2 s_1)} \leq \frac{M_1 L^2 e^{s_1 t}}{n^3 \pi^2 a}$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем сходимость ряда, содержащего функцию $\psi(t)$.

В силу того, что функциональная последовательность $\left\{ n \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ не является ограниченной для всех $x \in [0, L]$, то по теореме Абеля ряды в (12), содержащие функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, не являются сходящимися.

На втором этапе редукции, обобщая результат [18], осуществляем регуляризацию, аппроксимируя каждый из рядов в (12) конечным рядом. Решение $u(x, t)$ прямой задачи (5)–(7) примет вид:

$$u(x, t) = \varphi(t) \frac{L-x}{L} + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{N_1} \frac{(-1)^n}{n} \sin \left(\frac{\pi n(L-x)}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau +$$

$$+ \psi(t) \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{(-1)^n}{n} \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^t \psi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N_3} \frac{1}{2n-1} \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{L} \right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2} t} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} \tau} d\tau \quad (14)$$

На третьем этапе редукции проинтегрируем конечные ряды в (14). Имеем:

$$u(x, t) = \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^{n+1} n \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right) \int_0^t \psi(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} (t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^{N_2} n \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right) \int_0^t \varphi(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} (t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N_3} \frac{1}{2n-1} \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{L} \right) \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} (t-\tau)} d\tau. \quad (15)$$

Отсюда и граничных условий (2), имеем:

$$q(t) = \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^{n+1} n \sin \left(\frac{\pi n x_0}{L} \right) \int_0^t \psi(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} (t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^{N_2} n \sin \left(\frac{\pi n x_0}{L} \right) \int_0^t \varphi(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} (t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N_3} \frac{1}{2n-1} \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x_0}{L} \right) \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} (t-\tau)} d\tau \quad (16)$$

Введем следующие обозначения:

$$K_N(t-\tau) = \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^{N_1} (-1)^{n+1} n \sin \left(\frac{\pi n x_0}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} (t-\tau)},$$

$$Q_N(t-\tau) = \frac{2\pi a}{L^2} \sum_{n=1}^{N_2} n \sin \left(\frac{\pi n x_0}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a}{L^2} (t-\tau)},$$

$$R_N(t-\tau) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N_3} \frac{1}{2n-1} \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x_0}{L} \right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a}{L^2} (t-\tau)}$$

при всех $t \in [0, T]$.

Тогда уравнение (16) примет вид:

$$\int_0^t K_N(t-\tau) \psi(\tau) d\tau = g(t) - \left(\int_0^t Q_N(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau + \int_0^t R_N(t-\tau) f(\tau) d\tau \right). \quad (17)$$

Учитывая, что вместо действительных значений φ_0 и q_0 известны приближенные значения φ_δ и q_δ , необходимо найти решение уравнения (17) при условии $\max \left\{ \|q_\delta - q_0\|_C, \|\varphi_\delta - \varphi_0\|_C \right\} \leq \delta$. Для построения решения $u_\delta(x, t)$ уравнения (17) предлагается метод, основанный на конечных интегральных представлениях.

Вычислительная схема метода решения

Основные этапы метода решения уравнения (17) заключаются в следующем. Сначала выбираем начальные значения параметров регуляризации: шага дискретизации по времени h и величин N_1, N_2 и N_3 .

Затем вводим сетку с узлами t_i , где $t_i = ih$, $i = 0, s$, $s = \frac{T}{h}$. В результате дискретизации уравнения (17) получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^s h K_N(t_i - \tau_j) \psi(\tau_j) = q(t_i) - \left(\sum_{j=1}^s h Q_N(t_i - \tau_j) \varphi(\tau_j) + \sum_{j=1}^s h R_N(t_i - \tau_j) f(\tau_j) \right), \quad (18)$$

где $i = 1, s$. Далее переходим к итерационному процессу. На каждом шаге процесса находим решение системы (18) и оцениваем величину погрешности Δ , определяемую формулой:

$$\Delta = \frac{\max_{t_i \in [0, T]} |\psi_\delta(t_i) - \psi(t_i)|}{\max_{t_i \in [0, T]} |\psi(t_i)|}.$$

На следующем шаге выбираем новые значения N_1, N_2, N_3 и шага дискретизации h и решаем систему (18). По завершению решения находим новое значение Δ и сравниваем его с величиной, найденной на предыдущем шаге. Итерационный процесс останавливаем при достижении минимального значения величины Δ .

С целью проверки устойчивости построенного численного алгоритма относительно погрешности исходных данных и получения экспериментальных оценок погрешностей

был осуществлен вычислительный эксперимент на основе имитационного моделирования.

Вычислительный эксперимент

Эксперимент проводился при следующих теплофизических характеристиках процесса теплопереноса: длина линейного объекта $L = 10$, коэффициент температуропроводности $a = 1$, точка $x_0 = 0,1 \cdot L$. Для проведения вычислений в области $[0, L] \times [0, T]$ вводим сетку с узлами (x_i, t_j) , где $x_i = ih_x$, $i = 0, \dots, r + 1$, $r = L/h_x$; $t_j = jh_t$, $j = 0, \dots, m + 1$, $m = T/h_t$. Эксперимент осуществлялся для следующих тестовых моделей:

1. Функции, соответствующие первоначальному росту и последующему убыванию влияния внешнего теплового источника, при этом влияние функции внутреннего теплового постоянно уменьшается. Представителями данного типа являются функции $\varphi_1(t) = 15te^{-t/10}$, $\psi_1(t) = 20te^{-t/9}$ и $f_1(t) = 20e^{-t/10}(1 - 0,1t)$.

2. Функции, соответствующие росту влияния внешнего и внутреннего тепловых источников. Представителями данного типа являются функции $\varphi_2(t) = e^{t/9} - 1$, $\psi_2(t) = e^{2t/15} - 1$ и $f_2(t) = e^{t/20}$.

Основные этапы вычислительного эксперимента:

Этап 1. Моделирование температурных полей $u(x, t)$ в линейном объекте и тестовых функций. С этой целью для тестовых функций $\varphi_k(t)$, $f_k(t)$ и $\psi_k(t)$ находим решение $u(x, t)$ прямой задачи (5)–(7). Для этого используем метод конечно-разностной аппроксимации. Для определения температурной функции $q(t_i) = u(x_0, t_i)$ используем значения температурного поля $u(x, t)$ объекта в соответствующей точке x_0 .

Этап 2. Моделирование возмущенных исходных данных. Для этого формируем тестовые значения $q_\delta(t_i)$ и $\varphi_\delta(t_j)$ по формулам: $q_\delta(t_i) = q(t_i) + \mu_\delta(t_i)$, $\varphi_\delta(t_j) = \varphi(t_j) + \eta_\delta(t_j)$, где функции $\mu_\delta(t)$ и $\eta_\delta(t)$ распределены равномерно на отрезке $[-\delta, \delta]$.

Этап 3. Построение решения интегрального уравнения (17). Для этого используем предложенную вычислительную схему. Получаем $\psi_\delta(t)$.

Этап 4. Оценка температурных погрешностей. С этой целью используем функции $\Delta(t)$ и величины Δ_ψ , θ_ψ : $\Delta(t) = |\psi_\delta(t) - \psi(t)|$, $\Delta_\psi = \max_{t \in [0, T]} \Delta(t)$, $\theta_\psi = \frac{\Delta_\psi}{\max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|}$.

Если величины $\Delta(t)$, Δ_ψ , θ_ψ достигли ми-

нимального значения, то останавливаем итерационный процесс.

Этап 5. Построение температурных полей $u_\delta(x, t)$ в линейном объекте. По завершении итерационного процесса найденную функцию $\psi_\delta(t)$, соответствующую минимальному значению Δ , подставляем в прямую задачу (5)–(7) и находим температурное поле $u_\delta(x, t)$. Далее сравниваем функции $u_\delta(x, t)$ и $u(x, t)$, находя наибольшие отклонения температурных полей линейного объекта по формулам:

$$\Delta_u = \max_{(x, t) \in [0, \ell] \times [0, T]} |u_\delta(x, t) - u(x, t)|,$$

$$\theta_u = \frac{\Delta_u}{\max_{(x, t) \in [0, \ell] \times [0, T]} |u(x, t)|}.$$

На основании этих величин получаем оценки точности определения нестационарных температурных полей в линейном объекте.

Результаты вычислительного эксперимента

В работе представлены результаты вычислительного эксперимента, проведенного для тестовых функций, сформированных посредством имитационного моделирования. Результаты эксперимента приведены в таблице 1 для различных значений погрешностей исходных данных.

На рис. 2 и рис. 4 представлены результаты сравнительного анализа температурных полей $\psi_\delta(t)$, полученных в точке В и тестовых функций $\psi(t)$. Обозначения: линия 1 соответствует температурному полю $\psi_\delta(t)$, найденному с помощью предложенного метода; линия 2 соответствует тестовым значениям функции $\psi(t)$. На рис. 2б и рис. 4б показаны графики погрешностей $\Delta(t)$. Двумерные поверхности на рис. 3 и рис. 5 соответствуют температурным полям линейного объекта. Поверхности, озаглавленные «Температурное поле $u(x, t)$ », соответствуют тестовым значениям, сформированным на первом этапе вычислительного эксперимента. Поверхности, озаглавленные «Расчетное температурное поле $u_\delta(x, t)$ », соответствуют температурным полям, вычисленным с помощью предложенного метода.

Результаты имитационного моделирования свидетельствуют о достаточной точности и устойчивости относительно погрешности исходных данных предложенного алгоритма определения нестационарных температурных полей внутри объекта.

Экспериментальные оценки погрешностей температурных функций

Тестовые функции	Погрешность исходных данных, δ	Погрешности вычислений			
		Δ_ψ	θ_ψ	Δ_u	θ_u
Тест 1					
$\varphi_1(t) = 15te^{-t/10}$	0,01	5,4949	0,0830	3,3633	0,0464
$\psi_1(t) = 20te^{-t/9}$	0,03	5,5045	0,0831	3,5447	0,0458
$f_1(t) = 20e^{-t/10}(1 - 0,1t)$	0,05	5,5742	0,0842	3,4099	0,0471
	0,1	5,6359	0,0851	3,4863	0,0481
Тест 2					
$\varphi_2(t) = e^{t/9} - 1$	0,01	2,4712	0,0461	2,4712	0,0461
$\psi_2(t) = e^{2t/15} - 1$	0,03	2,5380	0,0474	2,5380	0,0474
$f_2(t) = e^{t/20}$	0,05	2,6221	0,0489	2,6221	0,0489
	0,1	2,7008	0,0504	2,7008	0,0504

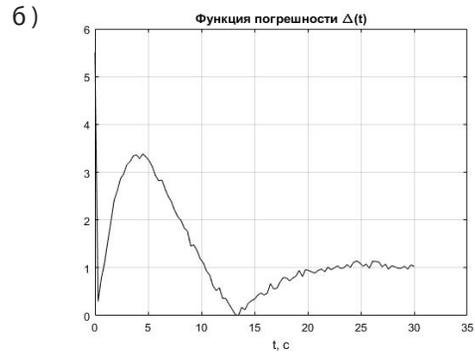
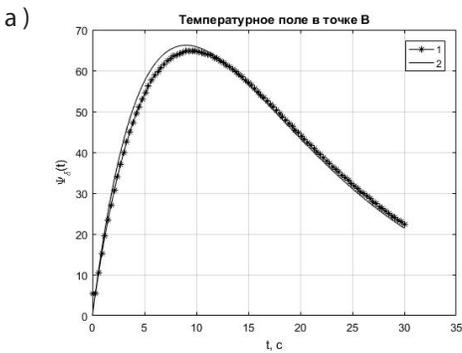


Рис. 2 а. Температурное поле в точке В для теста 1: 1 - температурное поле $\psi_\delta(t)$ в точке В; 2 - тестовая функция $\psi_1(t)$;
Рис. 2 б. График функции температурной погрешности $\Delta(t)$.

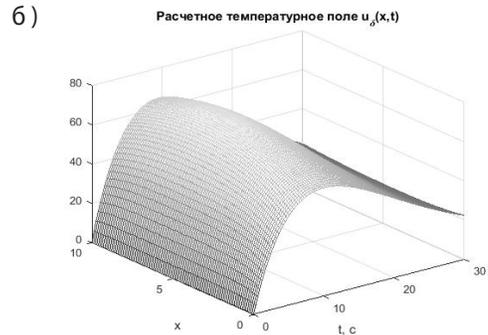
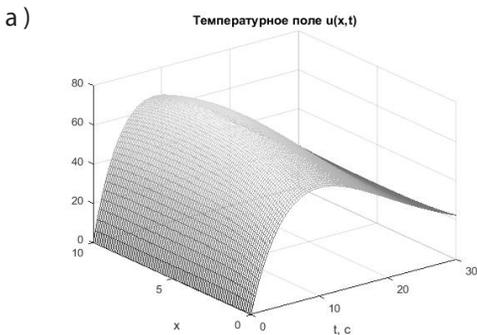


Рис. 3. Температурные поля в линейном объекте для теста 1. а – тестовое температурное поле $u(x,t)$;
б – расчетное температурное поле $u_\delta(x,t)$.

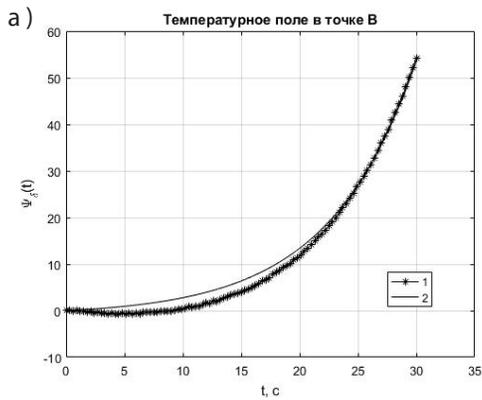


Рис. 4а. Температурное поле в точке В для теста 2: 1 - температурное поле $\psi_{\delta}(t)$ в точке В; 2 - тестовая функция $\psi_1(t)$;
Рис. 4б. График функции температурной погрешности $\Delta(t)$.

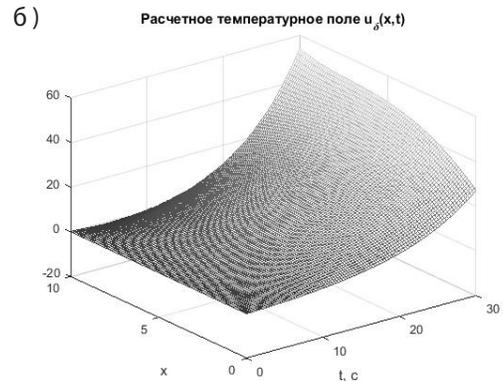
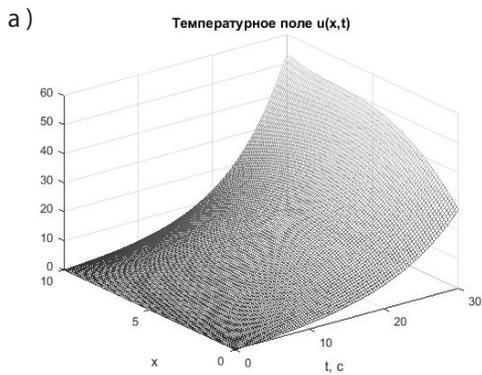


Рис. 5. Температурные поля в линейном объекте для теста 2. а – тестовое температурное поле $u(x, t)$; б – расчетное температурное поле $u_{\delta}(x, t)$.

Заключение

В данной статье предложен метод определения нестационарного температурного поля внутри неоднородного объекта, подвергаемого тепловому воздействию. Математическая модель учитывает теплообменные процессы внутри объекта, представленные в виде функции внутреннего теплового источника, и включает неоднородное уравнение параболического типа, начальные, а также граничные условия, формируемые из результатов измерений температуры вблизи границы.

В работе предложен метод редуцирования задачи (1)–(4) к интегральному уравнению и численный метод его решения. Результаты вычислительного эксперимента, включающего сравнительный анализ вычисленных значений температуры в контрольной

точке и тестовых значений, подтверждают эффективность, а также устойчивость относительно погрешности исходных данных предложенного метода решения задачи теплопереноса. Результаты эксперимента выявили, что предложенный метод решения интегрального уравнения обладает свойством саморегуляризации, когда возможно найти шаг дискретизации, обеспечивающий устойчивость вычислительной схемы.

Предложенный метод определения температуры позволяет обеспечить доступность информации о внутреннем тепловом состоянии объекта, а также целостность данных в процессе обработки зашумленной исходной измеренной информации путем уменьшения негативного влияния шумов на точность результатов ее обработки.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: учеб. пособие. 6-ое изд., испр. и доп. Москва: Изд. МГУ, 1999. – 735 с.

2. Лаврентьев М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений / Лаврентьев М.М. – Новосибирск: НГУ, 1973. – 71 с.
3. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. Москва: Машиностроение, 1988. – 280 с.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. Москва: Едиториал УРСС, 2009. – 784 с.
5. Кабаныхин С.И., Шишленин М.А. Прямые и интегральные методы решения обратных и некорректных задач // Сибирские электронные математические известия. 2008. Т.5, № 2. – С. 595-608.
6. Королев Ю.М., Ягола А.Г. Оценка погрешности в линейных обратных задачах при наличии априорной информации // Выч. методы и программирование: новые выч. технологии. 2012. Т.13. №1(25). – С.14–18.
7. Вабищевич П.Н., Васильев В.И. Выбор шага при численном решении краевых задач для параболических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 5. – С. 842–853.
8. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности. Методология. Киев: Наукова думка, 2002. – 408 с.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. СПб: Лань, 2009. – 608 с.
10. Вабищевич П.Н., Васильев В.И. Вычислительная идентификация младшего коэффициента параболического уравнения // Доклады Академии наук. 2014. Т. 455. № 3. – С. 258.
11. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. Москва: Наука, 1971. – 736 с.
12. Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д. О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом квазиобращения // Вестник Южно-Уральского университета. Серия: Математика, Механика, Физика. 2012, № 6. – С. 8–13.
13. Yaparova N. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. Vol.22, no 5. – P. 832–847.
14. Прилепко А.И. Корректность обратной задачи об источнике для параболических систем // Дифференциальные уравнения. 2004. т. 40. № 11. – С. 1540–1547.
15. Diligenskaya A. N., Rapoport E. Y. Method of minimax optimization in the coefficient inverse heat-conduction problem // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2016. Vol. 89, Issue 4. – P. 1008–1013.
16. Cialkowski M., Grysa K. A sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2010. Vol. 48, no.1. – P. 111-134.
17. Якимов А.С. Аналитический метод решения краевых задач. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. – 199 с.
18. Япарова Н.М., Гаврилова Т.П. Интегральная модель и численный метод определения температуры при линейном теплопереносе // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2019. Т.19, №4. С.60-71. DOI: 10.14529/ctcr190406.
19. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразований Лапласа и Z-преобразования. Москва: Наука, 1971. – 288 с.

References

1. Tihonov A.N. Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics], Moscow: Publishing of the Moscow State University, 1999. – 799 p.
2. Lavrentiev M.M. Uslovno korrektnye zadachi dlya diferencialnyh uravnenij [Conditionally Correct Problems for Differential Equations], Novosibirsk: Publishing of Novosibirsk Government University, 1973, – 71 p.
3. Alifanov O.M. Obratnye zadachi teploobmena [Inverse Heat Transfer Problems]. Moscow: Mashinostroenie, 1988. – 280 p.
4. Samarskij A.A., Vabishchevich P.N. Vychislitel'naya teploperedacha [Computational Heat Transfer]. Moscow: Editorial URSS, 2009. – 784 p.
5. Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Direct and Integral Methods for Solving Inverse and Ill-posed Problems [Pryamyye i integralnyye metody resheniya obratnykh i nekorrektnykh zadach]. Sibirskie elektronnyye matematicheskiye izvestiya. 2008, vol. 5, no. 2. – P. 595–608.
6. Korolev Yu.M., Yagola A.G. Error Estimation in Linear Inverse Problems in the Presence of a Priori Information [Otsenka pogreshnosti v lineynykh obratnykh zadachakh pri nalichii apriornoy informatsii]. Vych. metody i programmirovaniye: novyye vych.tekhnologii. 2012, vol. 13, no. 1(25). – P. 14–18.
7. Vabishchevich P.N., Vasilyev V.I. Step Selection for Numerical Solution of Boundary Value Problems for Parabolic Equations [Vybor shaga pri chislennom reshenii krayevykh zadach dlya parabolicheskikh uravneniy]. Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki. 2017, vol. 57, no. 5. – P. 842–853.

8. Matsevityy Yu.M. Obratnyye zadachi teploprovodnosti. Metodologiya [Inverse Problems of Thermal Conductivity. Methodology] Kiyev: Naukova dumka, 2002. – 408 p.
9. Marchuk G.I. Metody vychislitelnoy matematiki [Methods of Computational Mathematics]. SPb: Lan, 2009. – 608 p.
10. Vabishchevich P.N., Vasilyev V.I. Computational Identification of the Lowest Coefficient of a Parabolic Equation [Vychislitel'naya identifikatsiya mladshogo ko-effitsiyenta parabolicheskogo uravneniya]. Doklady Akademii nauk, 2014, vol. 455, no. 3. – P. 258.
11. Samarskiy A.A. Vvedeniye v teoriyu raznostnykh skhem [Introduction to the Theory of Difference Schemes] Moskva: Nauka, 1971. – 736 p.
12. Tabarintseva E.V., Menikhes L.D., Drozin A.D. On Solving the Boundary Inverse Problem for a Parabolic Equation by the Quasi-Inversion Method [O reshenii granichnoy obratnoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya metodom kvaziobrashcheniya]. Vestnik Yuzhno-Uralskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika, 2012, no. 6. – P. 8–13.
13. Yaparova N. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem. Inverse Problems in Science and Engineering, 2014, vol.22, no 5, pp. 832-847. DOI: 10.1080/17415977.2013.830614.
14. Prilepko A.I. Correctness of the Inverse Source Problem for Parabolic Systems [Korrektnost obratnoy zadachi ob istochnike dlya parabolicheskikh]. Differentsialnyye uravneniya, 2004, vol. 40, no. 11. – P. 1540–1547.
15. Diligenskaya A. N., Rapoport E. Y. Method of minimax optimization in the coefficient inverse heat-conduction problem. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2016, vol. 89, Issue 4. – P. 1008–1013.
16. Cialkowski M., Grysa K. [A sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation]. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, vol. 48, no.1. – P. 111–134.
17. Yakimov A.S. Analiticheskiy metod resheniya krayevykh zadach [Analytical Method for Solving Boundary Value Problems]. Tomsk: Publishing of the Tomsk State University, 2011. – 199 p.
18. Yaparova N.M., Gavrilova T.P. Integral Model and Numerical Method for Determining Temperature in Linear Heat Transfer [Integral'naya model i chislennyy metod opredeleniya temperatury pri lineynom teploperenose]. Vestnik YuUrGU. Seriya «Kompyuternyye tekhnologii. upravleniye. radioelektronika», 2019, vol. 19, no. 4, pp. 60-71. DOI: 10.14529/ctcr190406.
19. Dech G. Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniy Laplasy i Z-preobrazovaniya [Guide to the Practical Application of Laplace Transforms and Z-transforms]. Moscow: Nauka. 1971. – 288 s.

ЯПАРОВА Наталья Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)». Россия, 454080 Челябинск, проспект Ленина, 76. E-mail: iaparovann@susu.ru.

ГАВРИЛОВА Татьяна Петровна, старший преподаватель кафедры вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)». Россия, 454080 Челябинск, проспект Ленина, 76. E-mail: gavrilovatp@susu.ru.

YAPAROVA Natalia Mikhailovna, Ph.D. in math, Associate Professor, Head of Department of Computational Mathematics and High-Performance Computing, Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “South Ural State University (national research university)”. 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080. E-mail: iaparovann@susu.ru.

GAVRILOVA Tatiana Petrovna, Senior Lecturer of Department of Computational Mathematics and High-Performance Computing, Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “South Ural State University (national research university)”. 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, Russia, 454080. E-mail: gavrilovatp@susu.ru.