



ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОЙ ТРУБКИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЦЕЛОСТНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ РАСХОДОМЕРА

Статья посвящена проблематике целостности и доступности информации, получаемой от датчиков контроля расхода жидкости. Предлагается численный метод определения колебаний прямолинейного участка трубки датчика, подверженного внешнему импульсному воздействию, и жестко закрепленного с обоих концов. Математическая модель процесса колебаний трубки датчика, учитывающая течение жидкости внутри трубки, представлена в виде дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с заданными начальными и граничными условиями. Проведены вычислительные эксперименты по колебаниям элементов трубки для определения необходимых характеристик колебаний. Определены амплитуды колебаний, разности фаз прямого элемента трубки. По результатам работы предложенного метода определяются необходимые характеристики колебаний трубки, что позволяет проверить точность измерений, полученных в ходе работы датчика.

Ключевые слова: достоверность измерений, колебания прямой трубы, амплитуды колебаний, разность фаз, Фурье-образы.

NUMERICAL SIMULATION OF THE CHARACTERISTICS OF THE OSCILLATIONS OF A STRAIGHT TUBE TO VERIFY THE INTEGRITY OF THE RESULTS OF THE FLOWMETER

The article is devoted to the issues of integrity and availability of information received from sensors controlling the flow of fluid. A numerical method was proposed for determining oscillations of a straight-line portion of a sensor tube exposed to an external pulse effect and rigidly fixed at both ends. The mathematical model of the oscillation tube sensor, taking into account the flow of fluid inside the tube, is presented in the form of a fourth-order partial differential equation with given initial and boundary conditions. The computational experiments on the oscillations of the tube elements were carried out to determine the necessary characteristics of the oscillations. The amplitudes of oscillations, the phase difference of the direct element of the tube are determined. According to the results of the proposed method, the required characteristics of tube oscillations are determined, which allows to check the accuracy of measurements obtained during the operation of the sensor.

Keywords: authenticity accuracy, straight tube oscillations, oscillation amplitudes, phase difference, Fourier transforms.

Введение

При работе с датчиками измерения расхода жидкости, как со сложными объектами, важно оценить насколько точно информация, полученная в ходе измерений, отображает реальное состояние системы. Данную оценку можно провести только при известных амплитуде и фазах колебаний трубы, которые возможно получить только при обработке информации в АСУТП высокого уровня в традиционных подходах обычно предполагается, что функция, характеризующая процесс колебания трубы по времени является гармонической, а ее аналитическое представление имеет вид ряда с неопределенными коэффициентами. Далее эти коэффициенты определяются на основе результатов статистической обработки экспериментальных данных. Данный подход, при любых изменениях входных параметрах системы, требует перестроения всей вычислительной схемы,

так как возникает необходимость переопределения коэффициентов, что в свою очередь нарушает целостность информации.

Актуальность исследования характеристик колебаний прямых труб связана с широким использованием кориолисовых расходомеров, принцип действия которых основан на разности фаз колебаний трубки датчика [1, 6, 9, 11-13]. Основу математических моделей составляют дифференциальные уравнения в частных производных, представленные в работах [4, 5]. В данной работе также представлено дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка для отклонений точек прямого участка трубки с учетом течения по ней жидкости [3-8].

Исследование проводят в предположении, что коэффициенты уравнения постоянны и решение этого уравнения, определяющее функцию колебаний элементов трубки датчика является гармонической функцией,

которую представляют в виде ряда Фурье с неопределёнными коэффициентами. При таком подходе для определения характеристик колебания трубки необходимо найти эти коэффициенты. Сложность заключается в том, что любые изменения скорости потока, пропускной способности, возникновение импульсных воздействий и т.д. необходимо вносить принципиальные изменения в метод определения коэффициентов в разложении в ряд Фурье [8, 9, 17].

Новизной данной работы является подход, идея которого заключается в том, что находится численное решение дифференциального уравнения 4-ого порядка, а затем оно представляется в виде Фурье-образов, из которых определяются необходимые характеристики колебаний трубки датчика, используемые для проверки целостности и достоверности результатов работы расходомера.

1. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель поперечных колебаний прямолинейного участка трубки длиной L , подверженной внешнему импульсному воздействию, [4, 12]:

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + (\beta v^2 + \Pi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2\beta v \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \xi} + (1 + \beta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + \chi \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

Переменные и параметры являются приведенными и характеризуются безмерными величинами: $\eta(\xi, \tau)$ — отклонение трубки от исходного состояния в направлении, перпендикулярном оси трубки, переменная ξ характеризует расстояние от левого конца трубки до текущей точки, $\xi \in [0, L]$, τ — соответствует текущему моменту времени, v — приведенная скорость потока жидкости. $\beta = \frac{M_f}{M_T}$, где M_T — масса трубки на единицу длины, а M_f — масса жидкости на единицу длины, χ — коэффициент демпфирования. Π — параметр изгибной жесткости.

Так как концы элемента трубки жестко за-

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=L} = 0, \quad \tau \geq 0 \quad (2)$$

Отсутствие дополнительных отклонение трубки в начальный момент времени реализуется в виде следующего начального условия:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \in [0, L] \quad (3)$$

Ситуация, когда трубка получает внешнее импульсное воздействие, представим в виде следующего дополнительного условия:

$$\eta(\xi, 0) = f(\xi), \quad \xi \in [0, L], \quad (4)$$

Введем обозначения $\alpha_1 = \beta v^2 + \Pi$, $\alpha_2 = 2\beta v$, $\alpha_3 = 1 + \beta$, $\alpha_4 = \chi$ и примем математическую модель колебаний трубы при импульсном воздействии в виде:

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial \xi} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + \alpha_4 \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 0,$$

$$\text{при } \xi \in (0, L), \quad \tau \geq 0$$

$$\eta(0, \tau) = \eta(L, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=L} = 0, \quad \tau \geq 0 \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \in [0, L]$$

$$\eta(\xi, 0) = f(\xi), \quad \xi \in [0, L]$$

2. Вычислительный эксперимент

Основная цель вычислительного эксперимента заключалась в построения численного решения рассматриваемой задачи (1)–(5), и нахождение значений разности фаз колебаний. В ходе эксперимента была найдена функция колебаний из уравнений (1)–(5) с помощью предложенного численного метода. Эксперимент проводился для $\tau \in [0; 2]$. Трубка получает мгновенное импульсное воздействие в средней точке, характеризуемое функцией (4). Пусть $f(\xi) = \mu \sin(\pi \xi)$, где μ — параметр, характеризующий амплитуду отклонения трубы в результате внешнего воздействия. Числовые значения параметров модели представлены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры модели

Параметр	Значение
a_1	0,1
a_2	0,2
a_3	1,1
a_4	0,01

креплены, то граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\eta(0, \tau) = \eta(1, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0$$

На рисунке 1 представлены отклонения точек трубки датчика в контрольных точках $\xi = 0,25$, $\xi = 0,5$ и $\xi = 0,75$ по времени.

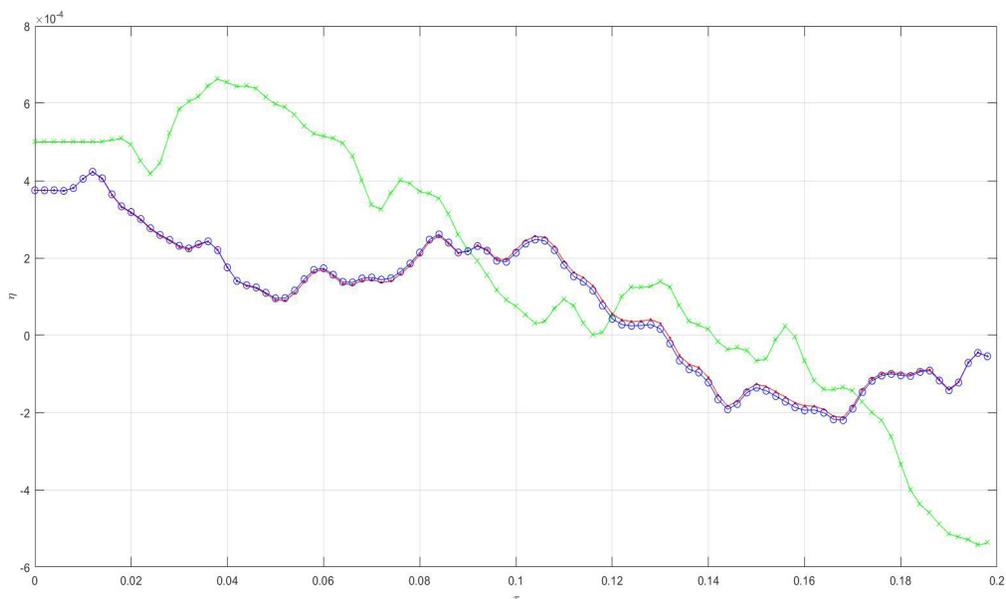


Рис. 1. Амплитуды отклонений точек трубки датчика $\xi=0,25$, $\xi=0,5$ и $\xi=0,75$

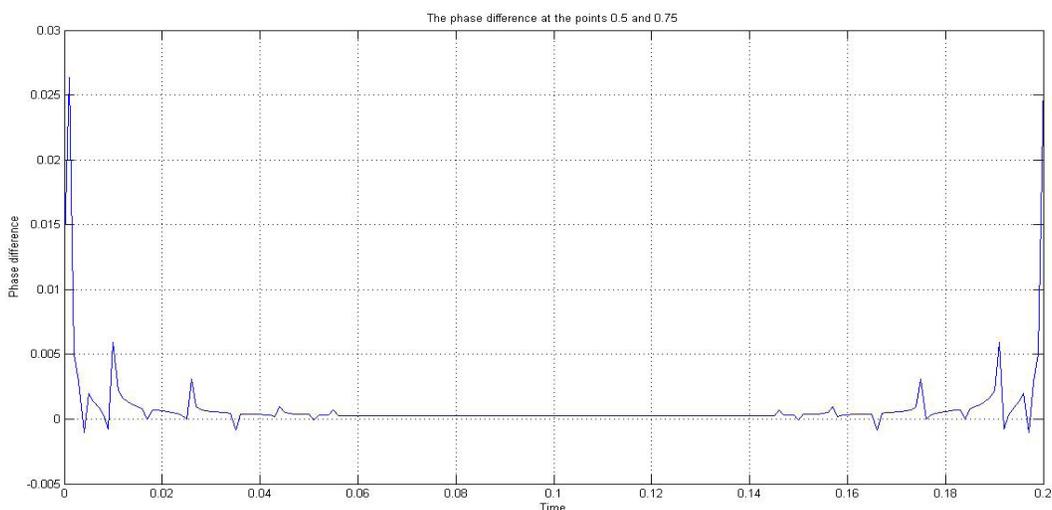


Рис. 2. Разность фаз колебаний точек трубки $\xi=0,5$ и $\xi=0,75$

Рисунок 1 соответствуют ситуации, когда в трубе протекает жидкость с усредненной скоростью $v = 1$.

3. Нахождение фаз колебаний для проверки целостности результатов работы расходомера

Прямое преобразование Фурье выполняется стандартной программой FFT2 (БПФ). Числовой ряд при этом должен содержать 2^m элементов (m — целое число), а для хранения коэффициентов Фурье требуется 2^m+2 поля памяти. Подбирается значение m , и из ряда ϕ_i формируется массив A_s с ближайшим к N_0+2 числом элементов $N_1+2=2^m+2 \geq N_0+2$, причем добавленные сверх числа N_0 элементы заполняются нулями. В результате работы

программы FFT2 вычисляются значения коэффициентов Фурье X_j ($j = 1, 2, \dots, N_1$).

Амплитудный частотный спектр $A(\omega_k)$ вычисляется через коэффициенты Фурье:

$$A(\omega_k)=X_1, \quad A(\omega_k)=X_{N_1},$$

$$A(\omega_k)=\frac{1}{2}\sqrt{X_j^2 + X_{j+1}^2} \quad (j=2k-1, 1 < k < N).$$

На рисунках 2–4 представлены разности фаз колебаний трубки в контрольных точках $\xi=0,25$, $\xi=0,5$ и $\xi=0,75$ по времени.

Результаты вычислительных экспериментов показали возможность определения функции колебаний из предложенной системы дифференциальных уравнений, с помощью явной схемы. Найдены фазы колебаний в заданных точках прямой трубы, позволяю-

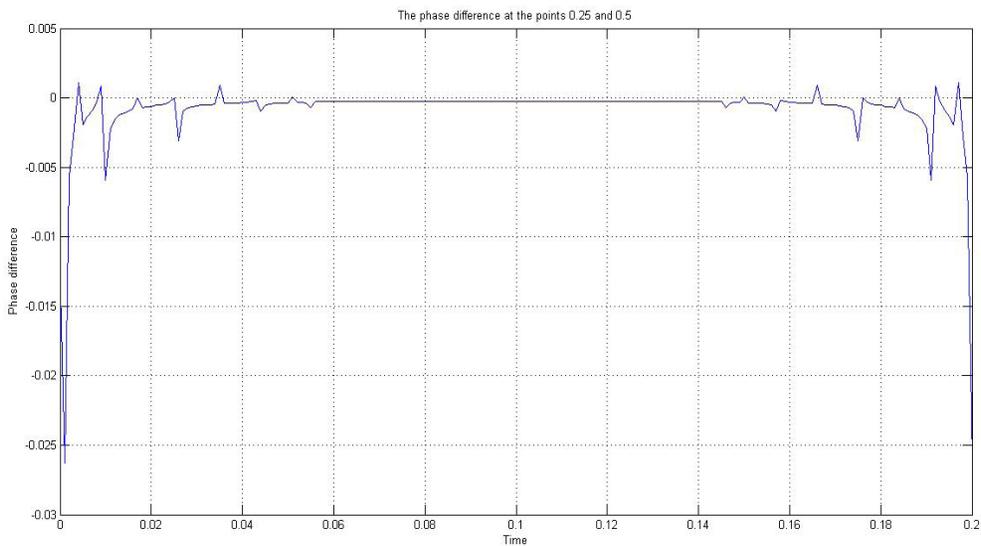


Рис. 3. Разность фаз колебаний точек трубки $\xi = 0,5$ и $\xi = 0,75$

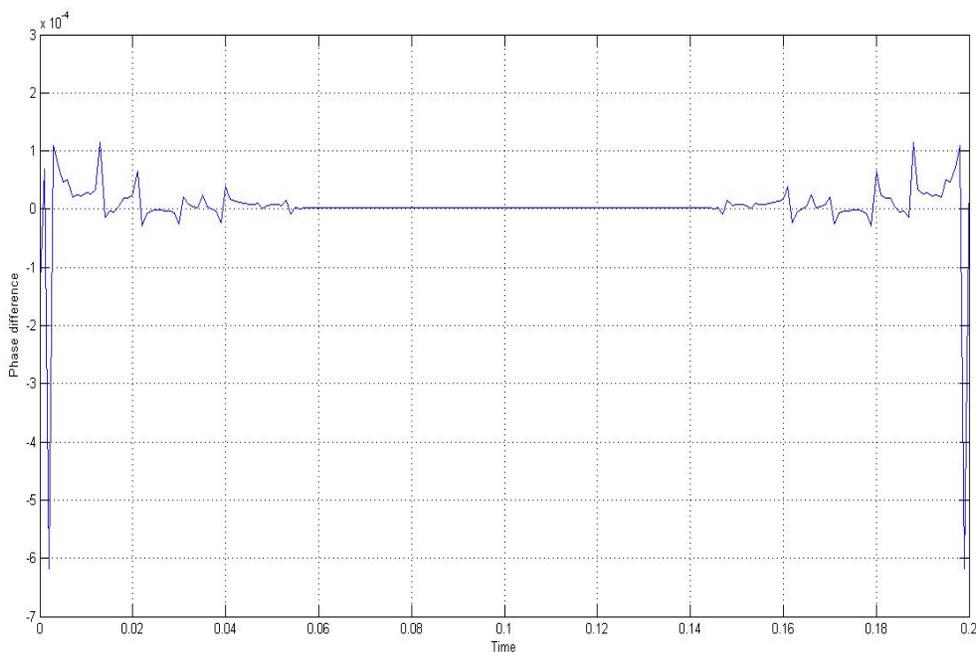


Рис. 4. Разность фаз колебаний точек трубки $\xi = 0,25$ и $\xi = 0,75$

щие проверить достоверность и целостность измерений, полученных в результате работы датчика.

Заключение

В работе представлены результаты вычислительных экспериментов по колебаниям элементов трубы и определены разности фаз

колебаний. Предложенный метод определяет неизвестную функцию колебаний прямолинейного участка трубы непосредственно из уравнения. Преобразование Фурье позволяет рассчитывать значение разности фаз колебаний для проверки достоверности и целостности результатов работы датчика.

Литература

- 1 Ильгамов, М.А. Прямая и обратная задачи изгиба трубопровода / Ильгамов М.А., Юлмухаметов А.А // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 3. – С. 100–112. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.06

- 2 Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. - М.:Наука, 1967. - 444 с.
- 3 Kutin, J. Stability-boundary effect in Coriolis meters / J. Kutin, I. Bajsic // Flow Measurement and Instrumentation. - 2001. - Vol. 12, №1. - P. 65–73.
- 4 Paidoussis, M.P. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow / M.P. Paidoussis. - Elsevier Academic Press, 2003. - Volume 2. - 942 p.
- 5 Худаяров Б. А. Численное моделирование нелинейных колебаний вязкоупругого трубопровода с жидкостью / Б. А. Худаяров, Ф. Тураев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 5. С. 90–98. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000550659>
6. Хакимов, А.Г. Пространственные колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления / А.Г. Хакимов, М.М. Шакирьянов // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. - 2010. - Т. 14. - № 2 (37). - С. 30–35.
7. Кондратов, Д. В. Колебания упругих стенок трубы кольцевого сечения при пульсирующем ламинарном течении жидкости / Кондратов Д. В., Быкова Т. В. // Вестник ННГУ. 2011. №4-5.
8. Чернятин, В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В.А. Чернятин. - М.:МГУ, 1991. - 112 с.
9. Федотов А. А. Математическая модель упругих колебаний трубопровода при ударном воздействии / А. А. Федотов //Международный научно-технический журнал. 2017. № 5-3.С. 128–132.
10. Самарский, А.А. Теория разностных схем. / А.А. Самарский. - М.: Наука, 1977. - 656 с.
11. Александров, А.А. Оценка надежности магистральных трубопроводов на сейсмостойкость / Александров А.А., Котляревский В.А., Ларионов В.И. // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2011. № 4. С. 54-62.
- 12 Прокудина Л. А., Численное моделирование колебаний элементов трубы с потоком несжимаемой жидкости / Прокудина Л. А., Япарова Н. М., Вихирев М. П. // Вестник Южно-Уральского Государственного Университета. Вычислительная математика. 2018. том 7, выпуск 3 С. 55–64. DOI: <https://doi.org/10.14529/cmse180304>.
- 13 Mironov M.A., Pyatakov P.A., Andreev A.A. Forced flexural vibrations of a tube with a liquid flow Acoustic journal. 56(5), 684–692 (2010).
- 14 Baderko, E.A. A method of potential theory in boundary value problems for 2m-parabolic equations in a semibounded domain with a nonsmooth lateral boundary. Differential Equation, 24(1), 1–5 (1988).
- 15 Prokudina L.A. Nonlinear Evolution of Perturbations in a Thin Fluid Layer during Wave Formation. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 118(3), 480–488 (2014).
- 16 Yaparova N. Numerical Method for Solving an Inverse Boundary Problem with Unknown Initial Conditions for Parabolic PDE Using Discrete Regularization. In: Dimov, I., Farago, I., Vulkov, L. CONFERENCE 2016, LNCS, vol. 10187, pp. 752–759. Springer, Heidelberg (2016). <https://doi.org/10.10007/9>

References

1. Il'gamov, M.A. Pryanaya i obratnaya zadachi izgiba truboprovoda / Il'gamov M.A., Yulmukhametov A.A // Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika. – 2017. – № 3. – С. 100–112. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.06
2. Timoshenko, S.P. Kolebaniya v inzhenernom dele / S.P. Timoshenko. - М.:Наука, 1967. - 444 с.
3. Kutin, J. Stability-boundary effect in Coriolis meters / J. Kutin, I. Bajsic // Flow Measurement and Instrumentation. - 2001. - Vol. 12, №1. - P. 65–73.
4. Paidoussis, M.P. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow / M.P. Paidoussis. - Elsevier Academic Press, 2003. - Volume 2. - 942 p.
5. Khudayarov B. A. Chislennoye modelirovaniye nelineynykh kolebaniy vyazkoupругogo truboprovoda s zhidkost'yu / B. A. Khudayarov, F. Turayev // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2016. № 5. С. 90–98. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000550659>
6. Khakimov, A.G. Prostranstvennyye kolebaniya truboprovoda pod deystviyem peremennogo vnutrennego davleniya / A.G. Khakimov, M.M. Shakir'yanov // Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatcionnogo tekhnicheskogo universiteta. - 2010. - Т. 14. - № 2 (37). - С. 30–35.
7. Kondratov, D. V. Kolebaniya uprugikh stenok trubyy kol'tsevogo secheniya pri pul'siruyushchem laminarnom techenii zhidkosti / Kondratov D. V., Bykova T. V. // Vestnik NNGU. 2011. №4-5.
8. Chernyatin, V.A. Obosnovaniye metoda Fur'ye v smeshannoy zadache dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh / V.A. Chernyatin. - М.:МГУ, 1991. - 112 с.
9. Fedotov A. А. Matematicheskaya model' uprugikh kolebaniy truboprovoda pri udarnom vozdeystvii / А. А. Fedotov //Mezhdunarodnyy nauchno-tekhnicheskij zhurnal. 2017. № 5-3.С. 128–132.

10. Samarskiy, A.A. Teoriya raznostnykh skhem. / A.A. Samarskiy. - M.: Nauka, 1977. - 656 s.

11. Aleksandrov, A.A. Otsenka nadezhnosti magistral'nykh truboprovodov na seysmostoykost' / Aleksandrov A.A., Kotlyarevskiy V.A., Larionov V.I. // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baubana. Seriya: Yestestvennyye nauki. 2011. № 4. S. 54–62.

12. Prokudina L. A., Chislennoye modelirovaniye kolebaniy elementov trubys s potokom neszhimayemoy zhidkosti / Prokudina L. A., Yaparova N. M., Vikhirev M. P. // Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Vychislitel'naya matematika. 2018. tom 7, vypusk 3 S. 55–64. DOI: <https://doi.org/10.14529/cmse180304>.

13. Mironov M.A., Pyatakov P.A., Andreev A.A. Forced flexural vibrations of a tube with a liquid flow Acoustic journal. 56(5), 684–692 (2010).

14. Baderko, E.A. A method of potential theory in boundary value problems for 2m-parabolic equations in a semibounded domain with a nonsmooth lateral boundary. Differential Equation, 24(1), 1–5 (1988).

15. Prokudina L.A. Nonlinear Evolution of Perturbations in a Thin Fluid Layer during Wave Formation. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 118(3), 480–488 (2014).

16. Yaparova N. Numerical Method for Solving an Inverse Boundary Problem with Unknown Initial Conditions for Parabolic PDE Using Discrete Regularization. In: Dimov, I., Farago, I., Vulkov, L. CONFERENCE 2016, LNCS, vol. 10187, pp. 752–759. Springer, Heidelberg (2016). <https://doi.org/10.10007/9>

ПРОКУДИНА Людмила Александровна, д. ф.-м. н., профессор кафедры вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений ЮУрГУ. 454080 г. Челябинск, пр. Ленина, д. 76, E-mail: prokudinala@susu.ru

ЯПАРОВ Дмитрий Данилович, магистр кафедры вычислительной математики и высокопроизводительных вычислений ЮУрГУ. 454080 г. Челябинск, пр. Ленина, д. 76, E-mail: iaparovdd@susu.ru

PROKUDINA Lyudmila Aleksandrovna, Dr. F.-M. Sci., Professor, Department of Computational Mathematics and High Performance Computing, SUSU. 454080, Chelyabinsk, Lenin Avenue, 76, E-mail: prokudinala@susu.ru

YAPAROV Dmitriy Danilovich, Master of the Department of Computational Mathematics and High Performance Computing SUSU. 454080, Chelyabinsk, Lenin Avenue, 76, E-mail: iaparovdd@susu.ru